



# **Théorème de Keller-Liverani et forte ergodicité.**

Déborah Ferré

## **► To cite this version:**

| Déborah Ferré. Théorème de Keller-Liverani et forte ergodicité.. 2010. hal-00538107

**HAL Id: hal-00538107**

**<https://hal.science/hal-00538107>**

Preprint submitted on 21 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Théorème de Keller-Liverani et forte ergodicité.

D.FERRE \*

novembre 2010

Cette note est extraite de mon rapport de thèse, thèse dirigée par Loïc HERVE et James LEDOUX<sup>1</sup>. Elle regroupe, détaille et parfois simplifie des énoncés et arguments présentés dans des articles différents, voire des arguments non publiés (conservation du rang, travail avec une semi norme).

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorème de Keller-Liverani</b>	<b>2</b>
1.1	Hypothèse $\mathcal{C}_0(0)$ et théorème de perturbations d'opérateurs de Keller-Liverani.	3
1.2	Vitesse de convergence dans le théorème de Keller-Liverani. . . . .	8
1.3	Remarque. . . . .	10
<b>2</b>	<b>Forte ergodicité.</b>	<b>11</b>
2.1	Définition de projecteurs et quelques lemmes. . . . .	14
2.2	Rang des projecteurs. . . . .	15
2.3	Cas particulier : $rg(\Pi) = 1$ . . . . .	17

Soit  $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$  un espace de Banach. On note  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  l'espace des applications linéaires continues de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}$ . On note par le même symbole  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  la norme sur  $\mathcal{B}$  et la norme associée sur  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ . On désigne par  $Id$  l'élément identité de  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ . On note  $\mathcal{B}' := \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$  le dual topologique de  $\mathcal{B}$ .

---

\*INSA IRMAR, UMR-CNRS 6625. Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, 20, Avenue des Buttes de Cœsmes CS 14315, 35043 Rennes Cedex, France. Deborah.Ferre@insa-rennes.fr

1. INSA IRMAR, UMR-CNRS 6625. Institut National des Sciences Appliquées de Rennes, 20, Avenue des Buttes de Cœsmes CS 14315, 35043 Rennes Cedex, France. Loic.Herve@insa-rennes.fr et James.Ledoux@insa-rennes.fr

Soit  $Q$  un élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ . On note  $\sigma(Q|_{\mathcal{B}})$  son spectre,  $\rho(Q|_{\mathcal{B}})$  son ensemble résolvant,  $r(Q|_{\mathcal{B}})$  son rayon spectral et  $r_{ess}(Q|_{\mathcal{B}})$  son rayon spectral essentiel. De plus, le rayon spectral vérifie

$$r(Q|_{\mathcal{B}}) = \lim_n \|Q^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|Q^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(Q|_{\mathcal{B}})\} \quad (1)$$

et le rayon spectral essentiel (formule de Nussbaum)

$$r_{ess}(Q|_{\mathcal{B}}) = \lim_n \left( \inf \{ \|Q^n - V\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}}; V \text{ opérateur compact sur } \mathcal{B} \} \right). \quad (2)$$

Soit  $(\tilde{\mathcal{B}}, \|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{B}}})$  un autre espace normé tel que  $\mathcal{B}$  s'injecte continûment dans  $\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ . On note pour tout  $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$

$$\|Q\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} = \sup\{\|Qf\|_{\tilde{\mathcal{B}}}; f \in \mathcal{B}, \|f\|_{\mathcal{B}} \leq 1\}.$$

On considère une famille  $(Q(t); t \in I_0)$  d'opérateurs linéaires sur  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$  avec  $I_0$  un voisinage réel de 0. On note  $Q := Q(0)$  l'opérateur non perturbé.

On s'intéresse dans ce qui suit à l'existence de l'inverse dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  de l'application  $z - Q(t) := z \text{Id} - Q(t)$  pour  $z$  dans  $\mathbb{C}$ , que l'on note (sous réserve d'existence) :

$$R(z) := (z - Q)^{-1} \text{ la résolvante de l'opérateur non perturbé}$$

$$\text{et } R_t(z) := (z - Q(t))^{-1} \text{ la résolvante de l'opérateur perturbé.}$$

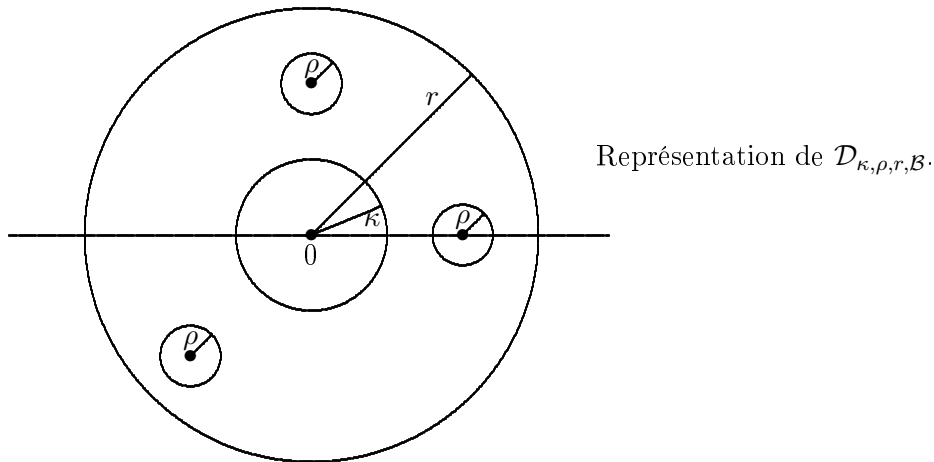
Par ailleurs, on désigne le disque fermé de  $\mathbb{C}$  centré en  $c$  et de rayon  $r$  par  $\overline{D}(c, r) := \{z \in \mathbb{C}; |z - c| \leq r\}$  et le disque ouvert par  $D(c, r) := \{z \in \mathbb{C}; |z - c| < r\}$ .

Enfin, pour tout  $x$  réel positif,  $\lceil x \rceil$  désigne l'entier immédiatement supérieur à  $x$ .

## 1 Théorème de Keller-Liverani

Cette étude se fera plus particulièrement sur les compacts  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  pour  $\kappa, \rho, r$ , réels strictement positifs, avec  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  défini par :

$$\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}} := \{z \in \mathbb{C}; |z| \geq \kappa, d(z, \sigma(Q|_{\mathcal{B}})) \geq \rho, |z| \leq r\}. \quad (3)$$



### 1.1 Hypothèse $\mathcal{C}_0(0)$ et théorème de perturbations d'opérateurs de Keller-Liverani.

On rappelle que l'on considère  $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$  un espace de Banach et  $(\tilde{\mathcal{B}}, \|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{B}}})$  un autre espace normé tels que  $\mathcal{B}$  s'injecte continûment dans  $\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ , ainsi qu'une famille  $(Q(t); t \in I_0)$  d'opérateurs linéaires sur  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$  avec  $I_0$  un voisinage réel de 0.

#### Hypothèse $\mathcal{C}_0(0)$

$(Q(t); t \in I_0)$  est une famille d'opérateurs linéaires continus sur  $\mathcal{B}$  (c'est-à-dire  $\forall t \in I_0, Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ ) et telle que  $Q \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}})$ , qui vérifie :

(H1) Il existe des constantes  $c_1 > 0$ ,  $\kappa_1 > 0$  et  $M > 0$  telles que, pour tous  $t \in I_0$ ,  $f \in \mathcal{B}$  et  $n \in \mathbb{N}$  on ait

$$\|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \kappa_1^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

(H2)  $\Delta(t) := \|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} \xrightarrow{t \rightarrow 0, t \in I_0} 0$ .

L'inégalité écrite dans la condition (H1) est appelée inégalité de Doeblin-Fortet, en lien avec le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (cf. [Hen93]). On notera que (H1) implique que  $(Q(t); t \in I_0)$  est une famille d'opérateurs linéaires continus sur  $\mathcal{B}$ . On notera aussi que la condition (H2) est plus faible que la condition de continuité en  $t = 0$  des opérateurs  $\{Q(t); t \in I_0\}$  sur  $\mathcal{B}$  nécessaire au théorème classique des perturbations [DS58].

**Théorème 1.** *Sous l'hypothèse  $\mathcal{C}_0(0)$ , pour tous  $\kappa$ ,  $\rho$  et  $r$  tels que  $\kappa > \kappa_1$ ,  $\rho > 0$  et  $r > 0$ , il existe un voisinage  $\tilde{I}_0 \subseteq I_0$  de 0 tel que les opérateurs  $R_t(z) := (z - Q(t))^{-1}$  soient bien définis dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  pour tous  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  et  $t \in \tilde{I}_0$ , et l'on a de plus :*

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}, t \in \tilde{I}_0\} < +\infty \quad (4)$$

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}\} \xrightarrow{t \rightarrow 0, t \in \tilde{I}_0} 0. \quad (5)$$

Comme  $\mathcal{B} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$  par hypothèse, on définit pour ce qui suit la constante  $\alpha > 0$  par

$$\forall f \in \mathcal{B}, \quad \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{B}}, \quad (6)$$

et comme  $Q \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}})$ , on définit également la constante  $\tilde{c} > 0$  telle que

$$\tilde{c} := \sup\{\|Qf\|_{\tilde{\mathcal{B}}}; f \in \tilde{\mathcal{B}}, \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq 1\}. \quad (7)$$

**Remarque 1.** *Le théorème 1 est en fait vérifié sur  $\{z \in \mathbb{C}; |z| \geq \kappa, d(z, \sigma(Q|_{\mathcal{B}})) \geq \rho\}$  et non pas seulement sur  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ .*

En effet, sur  $\{z \in \mathbb{C}; |z| > r(Q(t)|_{\mathcal{B}})\}$ ,  $z - Q(t)$  est inversible d'inverse  $R_t(z) = \sum_{n \geq 0} z^{-n-1} Q(t)^n$  (série de Von Neumann). Or par l'inégalité de Doeblin-Fortet (H1), il existe  $d := c_1(1 + \alpha) > 0$ , avec  $\alpha > 0$  défini par (6), telle que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in I_0$ , on ait  $\|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq d \max(\kappa_1, M)^n$ . En particulier  $r(Q(t)|_{\mathcal{B}}) = \lim_n \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} \leq \max(\kappa_1, M)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On a ainsi pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \geq \max(\kappa_1, M) + \varepsilon$  :

$$\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}} \leq \sum_{n \geq 0} |z|^{-n-1} \|Q(t)^n\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{d}{|z|} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{\max(\kappa_1, M)}{|z|} \right)^n$$

ce qui permet d'obtenir (cf. (4)) :  $\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}}; |z| \geq \max(\kappa_1, M) + \varepsilon, t \in I_0\} < +\infty$ . De plus,

$$(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1} = \sum_{n \geq 0} z^{-n-1} [Q(t)^n - Q^n] = \sum_{n \geq 0} z^{-n-1} \sum_{i=0}^{n-1} Q^i [Q(t) - Q] Q(t)^{n-1-i},$$

ce qui implique en considérant les normes

$$\begin{aligned} \|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} &\leq \sum_{n \geq 0} |z|^{-n-1} \Delta(t) d \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{c}^i \max(\kappa_1, M)^{n-1-i} \\ &= \Delta(t) \frac{d}{|z|^2} \sum_{n \geq 0} n \left( \frac{\max(\kappa_1, M, \tilde{c})}{|z|} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir (cf. (5)) :

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}; |z| \geq \max(\kappa_1, M, \tilde{c}) + \varepsilon\} \rightarrow_{t \rightarrow 0, t \in I_0} 0.$$

**Remarque 2.** On peut ne considérer qu'une semi norme sur  $\tilde{\mathcal{B}}$ , et supposer qu'il existe une constante  $\tilde{c} \geq 0$  telle que (7) soit vérifiée.

*Preuve du théorème 1.* La preuve suivante est une synthèse de [KL99, Liv04] (voir aussi [Bal00], th. 3.8). Soient  $\kappa$ ,  $\rho$  et  $r$  fixés vérifiant les conditions du théorème. Par définition du spectre et de  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ , l'opérateur  $R(z) = (z - Q)^{-1}$  est bien défini dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  pour tout  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ . De plus  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  est compact dans  $\mathbb{C}$ , et par continuité de  $L \mapsto L^{-1}$  sur les inversibles de  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ , l'application  $z \mapsto R(z)$  est continue sur  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ . Ceci permet de définir

$$H = H_{\kappa, \rho, r} := \sup \{ \|R(z)\|_{\mathcal{B}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}} \} < +\infty. \quad (8)$$

On utilisera les inégalités suivantes pour tout  $t \in I_0$  qui découlent de (H1) :

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{B}} \leq c \quad \text{et} \quad \|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B}} \leq 2c, \quad \text{avec} \quad c := c_1 \kappa_1 + c_1 M \alpha, \quad (9)$$

avec  $\alpha$  défini en (6). On rappelle que l'on a défini par ailleurs  $\tilde{c}$  en (7).

Enfin, on utilisera dans cette preuve les inégalités suivantes pour  $z \neq 0$  :

$$\begin{aligned} Id &= z^{-n} Q(t)^n + \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} z^{-i} Q(t)^i (z - Q(t)) \\ &= z^{-n} Q(t)^n + \frac{1}{z} (z - Q(t)) \sum_{i=0}^{n-1} z^{-i} Q(t)^i. \end{aligned} \quad (10)$$

1) *Existence de l'inverse de  $z - Q(t)$  pour  $|t|$  petit.*

On démontre dans cette partie la continuité du spectre perturbé.

**Proposition 1.** *Il existe un voisinage  $\tilde{I}_0 \subseteq I_0$  de 0 tel que  $z - Q(t)$  soit inversible pour tous  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  et  $t \in \tilde{I}_0$ .*

*Preuve de la proposition 1.* On explicite ci-dessous l'inverse à droite de  $z - Q(t)$  (et donc la surjectivité de l'opérateur  $z - Q(t)$ ) pour tous  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  et  $t$  suffisamment petit de  $I_0$ , puis son injectivité.

1)a) Inverse à droite (surjectivité). On rappelle que  $R(z) = (z - Q)^{-1}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in I_0$  et  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ . On a par l'égalité (10)

$$\begin{aligned} (z - Q(t)) \left[ \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} z^{-i} Q(t)^i + z^{-n} Q(t)^n R(z) \right] &= Id - z^{-n} Q(t)^n \left[ Id - (z - Q(t)) R(z) \right] \\ &= Id - z^{-n} Q(t)^n [Q(t) - Q] R(z). \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que  $\delta_d(t) := \|z^{-n} Q(t)^n [Q(t) - Q] R(z)\|_{\mathcal{B}} < 1$  pour un  $n$  suffisamment grand,  $n \geq N_d$  avec  $N_d$  à déterminer et  $t \in I_0$  suffisamment petit pour montrer l'existence de l'inverse à droite suivant :

$$I_t(z) := \left[ \left( \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{N_d-1} z^{-i} Q(t)^i \right) + z^{-N_d} Q(t)^{N_d} R(z) \right] \left[ Id - z^{-N_d} Q(t)^{N_d} (Q(t) - Q) R(z) \right]^{-1}. \quad (11)$$

Soit  $h \in \mathcal{B}$ . En utilisant (H1), puis (8) (9) et (H2), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_d(t) &\leq |z|^{-n} \left[ c_1 \kappa_1^n \|(Q(t) - Q) R(z) h\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \|(Q(t) - Q) R(z) h\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \right] \\ &\leq \kappa^{-n} \left[ c_1 \kappa_1^n 2cH \|h\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \Delta(t) H \|h\|_{\mathcal{B}} \right] \\ &\leq A \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n \|h\|_{\mathcal{B}} + B_n \Delta(t) \|h\|_{\mathcal{B}} \quad \text{avec} \quad A = 2c_1 cH \quad \text{et} \quad B_n = H c_1 \left( \frac{M}{\kappa} \right)^n. \end{aligned}$$

Fixons maintenant  $N_d \geq 0$  tel que  $A \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^{N_d} < \frac{1}{2}$ , soit par exemple  $N_d = \lceil \frac{\ln(2A)}{\ln \frac{\kappa}{\kappa_1}} \rceil$ , puis un voisinage  $\widetilde{I_{0,d}} \subseteq I_0$  tel que  $B_{N_d} \Delta(t) < \frac{1}{2}$  pour tout  $t \in \widetilde{I_{0,d}}$ . On a alors la condition recherchée.

1)b) Injectivité. Définissons les constantes suivantes, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a := \alpha H c_1 \quad \text{et} \quad b_n := \alpha H c_1 \left( \frac{M}{\kappa} \right)^n + \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\tilde{c}}{\kappa} \right)^i, \quad (12)$$

$$a_1 := 2c_1 \left( \frac{M}{\kappa} \right)^{N_0} \quad \text{et} \quad a_2 := \frac{2}{\kappa} \sum_{i=0}^{N_0-1} \left( \frac{c}{\kappa} \right)^i \quad (13)$$

avec  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $c_1 \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^{N_0} \leq \frac{1}{2}$ , soit par exemple  $N_0 = \lceil \frac{\ln(2c_1)}{\ln \frac{\kappa}{\kappa_1}} \rceil$ .

**Lemme 1.** On a pour tous  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ ,  $f \in \mathcal{B}$ , et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|R(z)f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq a \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n \|f\|_{\mathcal{B}} + b_n \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

**Lemme 2.** On a pour tous  $t \in I_0$ ,  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  et  $g \in \mathcal{B}$  :

$$\|g\|_{\mathcal{B}} \leq a_1 \|g\|_{\tilde{\mathcal{B}}} + a_2 \|(z - Q(t))g\|_{\mathcal{B}}.$$

Ces deux lemmes permettent de démontrer le lemme suivant. Pour ce dernier, nous considérons un entier  $N_g \in \mathbb{N}$  tel que  $a_1 a_2 c (\frac{\kappa_1}{\kappa})^{N_g} \leq \frac{1}{4}$ , soit par exemple  $N_g = \lceil \frac{\ln(8a_1 a_2 c)}{\ln \frac{\kappa}{\kappa_1}} \rceil$ , puis un intervalle  $\widetilde{I_{0,g}} \subset I_0$  tel que pour tout  $t \in \widetilde{I_{0,g}}$  on ait  $a_1 b_{N_g} \Delta(t) \leq \frac{1}{4}$ , où  $\Delta(\cdot)$  est la fonction de (H2).

**Lemme 3.** *On a pour tous  $t \in \widetilde{I_{0,g}}$ ,  $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$  et  $h \in \mathcal{B}$  :*

$$\|h\|_{\mathcal{B}} \leq 2 \left[ a_1 b_{N_g} \alpha + a_1 a \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^{N_g} + a_2 \right] \|(z - Q(t))h\|_{\mathcal{B}}.$$

*Preuve du lemme 3.* En appliquant successivement le lemme 2 avec  $g = h$ , le lemme 1 avec  $f = (z - Q)h$ , et enfin les inégalités suivantes (cf. (9), (H2) et (6))

$$\begin{aligned} \|(z - Q)h\|_{\mathcal{B}} &\leq \|(Q(t) - Q)h\|_{\mathcal{B}} + \|(z - Q(t))h\|_{\mathcal{B}} \leq 2c\|h\|_{\mathcal{B}} + \|(z - Q(t))h\|_{\mathcal{B}} \\ \|(z - Q)h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} &\leq \|(Q(t) - Q)h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + \|(z - Q(t))h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \Delta(t)\|h\|_{\mathcal{B}} + \alpha \|(z - Q(t))h\|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{B}} &\leq a_1 \|h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + a_2 \|(z - Q(t))h\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq a_1 \left[ a \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n \|(z - Q)h\|_{\mathcal{B}} + b_n \|(z - Q)h\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \right] + a_2 \|(z - Q(t))h\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq a_1 \left[ a \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n 2c + b_n \Delta(t) \right] \|h\|_{\mathcal{B}} + \left[ a_1 b_n \alpha + a_1 a \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n + a_2 \right] \|(z - Q(t))h\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Avec  $n = N_g$  et en vertu des conditions imposées ci-dessus sur  $N_g$  et  $\widetilde{I_{0,g}}$ , ceci démontre le lemme 3.  $\square$

Montrons maintenant les deux lemmes 1 et 2.

*Preuve du lemme 1.* Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathcal{D}_{\kappa,\rho,r,\mathcal{B}}$ . Par l'égalité (10) appliquée à  $R(z)f \in \mathcal{B}$  pour  $t = 0$  :

$$\|R(z)f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \|R(z)(z^{-1}Q)^n f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} + \left\| \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} (z^{-1}Q)^i f \right\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

Or, pour tout  $g \in \mathcal{B}$ , on a  $\|R(z)g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq \alpha \|R(z)g\|_{\mathcal{B}} \leq \alpha H \|g\|_{\mathcal{B}}$  par définition de  $H$  et  $\alpha$  (cf. (8) et (6)), ce qui implique en appliquant cette dernière inégalité avec  $g = (z^{-1}Q)^n f$ , puis (H1) :

$$\begin{aligned} \|R(z)f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} &\leq \alpha H \|(z^{-1}Q)^n f\|_{\mathcal{B}} + \left\| \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} (z^{-1}Q)^i f \right\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \\ &\leq \alpha H \left[ c_1 \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 \left( \frac{M}{\kappa} \right)^n \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \right] + \left\| \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} (z^{-1}Q)^i f \right\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.  $\square$

*Preuve du lemme 2.* Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ , et  $t \in I_0$ . De l'égalité (10), on déduit que l'on a pour tout  $g \in \mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathcal{B}} &\leq \| (z^{-1}Q(t))^n g \|_{\mathcal{B}} + \left\| \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} (z^{-1}Q(t))^i (z - Q(t)) g \right\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \left[ c_1 \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n \|g\|_{\mathcal{B}} + c_1 \left( \frac{M}{\kappa} \right)^n \|g\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \right] + \left\| \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{n-1} (z^{-1}Q(t))^i (z - Q(t)) g \right\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

la seconde inégalité découlant de (H1). Alors, en vertu de la condition imposée à  $N_0$ ,

$$\frac{1}{2} \|g\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \left( \frac{M}{\kappa} \right)^{N_0} \|g\|_{\tilde{\mathcal{B}}} + \left\| \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{N_0-1} (z^{-1}Q(t))^i (z - Q(t)) g \right\|_{\mathcal{B}},$$

ce qui démontre le lemme 2.  $\square$

1)c) Inverse. Des points a) et b) ci-dessus, il vient que, pour  $t \in \tilde{I}_0 := \widetilde{I_{0,d}} \cap \widetilde{I_{0,g}}$  et  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ , l'opérateur  $z - Q(t)$  est bijectif donc inversible par le théorème de l'application ouverte, ce qui termine la preuve de la proposition 1.  $\square$

2) Preuve de (4).

On rappelle que l'on a posé  $R_t(z) = (z - Q(t))^{-1}$ . On vient de montrer que  $R_t(z)$  est défini pour tous  $t \in \tilde{I}_0$  et  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$ , il reste à majorer la norme  $\|R_t(z)f\|_{\mathcal{B}}$ . En appliquant le lemme 3 à  $h = (z - Q(t))^{-1}g$  (pour tout  $g \in \mathcal{B}$ ), on obtient (4).  $\square$

3) Preuve de (5).

**Lemme 4.** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \tilde{I}_0$ ,  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  et  $g \in \mathcal{B}$ , on a

$$\|R(z) (Q(t) - Q)g\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \left[ 2ac \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n + b_n \Delta(t) \right] \|g\|_{\mathcal{B}}.$$

*Preuve du lemme 4.* Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g \in \mathcal{B}$ . Par le lemme 1 appliqué à  $(Q(t) - Q)g$ , puis (9) et (H2) :

$$\begin{aligned} \|R(z) (Q(t) - Q)g\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &\leq a \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n \|(Q(t) - Q)g\|_{\mathcal{B}} + b_n \|(Q(t) - Q)g\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \\ &\leq 2ac \left( \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)^n \|g\|_{\mathcal{B}} + b_n \Delta(t) \|g\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

qui est exactement l'inégalité voulue du lemme 4.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer (5). Soit  $f \in \mathcal{B}$ . Il est facile de voir que

$$R_t(z) - R(z) = R(z) (Q(t) - Q) R_t(z). \quad (14)$$



Par les lemmes 4 et 2 appliqués à  $g = R_t(z)f$ , on a

$$\|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \left[ 2ac\left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^n + b_n\Delta(t) \right] \left[ a_1\|R_t(z)f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} + a_2\|f\|_{\mathcal{B}} \right].$$

Par ailleurs on a en utilisant les constantes  $H$  et  $\alpha$  définies dans (8) et (6) :

$$\begin{aligned} \|R_t(z)f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &\leq \|R(z)f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} + \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \\ &\leq \alpha H\|f\|_{\mathcal{B}} + \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}, \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \left[ 2ac\left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^n + b_n\Delta(t) \right] \left[ (a_1\alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} + a_1\|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \right]. \quad (15)$$

Soit  $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ . On fixe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $2ac\left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^N \leq \frac{\epsilon}{2a_1}$ , soit par exemple  $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{4a_1ac}{\epsilon}}{\ln \frac{\kappa}{\kappa_1}} \right\rceil$ , puis  $I$  une restriction de  $\tilde{I}_0$  telle que pour tout  $t \in I$  on ait  $b_N\Delta(t) \leq \frac{\epsilon}{2a_1}$ . Alors pour tout  $t \in I$  :

$$\frac{1}{2} \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \left[ 2ac\left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^{N_2} + b_{N_2}\Delta(t) \right] (a_1\alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{\epsilon}{a_1} (a_1\alpha H + a_2)\|f\|_{\mathcal{B}}.$$

Cette dernière inégalité prouve la propriété (5).  $\square$

## 1.2 Vitesse de convergence dans le théorème de Keller-Liverani.

La vitesse de convergence dans (5) peut être explicitée en fonction de  $\Delta(t)$ , la fonction définie dans (H2).

**Corollaire 1.** *Sous l'hypothèse  $\mathcal{C}_0(0)$  page 3 et et que  $Q$  est quasi-compact de rayon spectral essentiel tel que  $r_{ess}(Q|_{\mathcal{B}}) \leq \kappa_0$ , pour tous  $\kappa$ ,  $\rho$  et  $r$  tels que  $\tilde{\kappa} < \kappa < r(Q)$  avec  $\tilde{\kappa}$  défini par*

$$\tilde{\kappa} := \max(\kappa_0, \kappa_1),$$

$\rho > 0$  et  $r > 0$ , on définit la constante suivante (fonction de  $\kappa$ ,  $\rho$  et  $r$ ) :

$$D := 2C(a_1\alpha H + a_2), \quad (16)$$

avec  $C := 2\alpha H c_1 c + \alpha H c_1 \frac{M}{\kappa} + \frac{d}{\kappa}$ ,  $d := \sum_{i \geq 0} \left( \frac{\kappa}{c} \right)^i < +\infty$  bien définie, et avec  $a_1$  et  $a_2$  définis en (13),  $\alpha$  en (6), et  $H$  en (8).

Alors la constante

$$\eta := \frac{\ln \frac{\kappa}{\kappa_1}}{\ln \frac{\max(\tilde{c}, M)}{\kappa_1}} \quad (17)$$

est bien définie, vérifie  $0 < \eta < 1$  et il existe une restriction  $\tilde{I}_2 \subseteq \tilde{I}_0$ , avec  $\tilde{I}_0$  défini dans le théorème 1 tel que l'on ait que pour tout  $t \in \tilde{I}_2$  :

$$\sup \left\{ \|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}} \right\} \leq D\Delta(t)^\eta. \quad (18)$$

*Preuve du corollaire 1 .* Pour démontrer ce corollaire, il suffit de majorer les termes fonction de  $n$  de l'inégalité (15).

**Lemme 5.** *La constante  $\eta$  vérifie  $0 < \eta < 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a*

$$b_n \leq (\alpha H c_1 \frac{M}{\kappa} + \frac{d}{\kappa}) \left( \frac{\max(\tilde{c}, M)}{\kappa} \right)^{n-1}.$$

*Preuve du lemme 5 .* La constante  $\tilde{c}$  définie en (7) vérifie

$$\tilde{c} > \kappa. \quad (19)$$

En effet, soit  $\lambda \in \sigma(Q)$ ,  $|\lambda| > \kappa$  (donc  $|\lambda| > \kappa_0 \geq r_{ess}(Q|_{\mathcal{B}})$ ), alors il existe  $\phi \neq 0 \in \mathcal{B}$  telle que  $Q\phi = \lambda\phi$ . Or  $\|\phi\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \neq 0$  (sinon par (H1), on aurait  $\|\phi\|_{\mathcal{B}} = \|\lambda^{-n} Q^n \phi\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \left(\frac{\kappa_1}{\lambda}\right)^n \|\phi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow_n 0$ , ce qui impliquerait que  $\phi = 0$ ), et donc on a (19). Ceci implique que  $0 < \eta < 1$  et  $d := \sum_{i \geq 0} \left(\frac{\kappa}{\tilde{c}}\right)^i < +\infty$ ,  $\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\tilde{c}}{\kappa}\right)^i \leq d \left(\frac{\tilde{c}}{\kappa}\right)^{n-1}$ . Ceci permet de majorer  $b_n$ , avec  $b_n$  définie en (12).  $\square$

On considère une restriction  $\tilde{I}_1$  de  $\tilde{I}_0$  telle que l'on ait pour tout  $t \in \tilde{I}_1$  :  $0 < \Delta(t) < 1$ . On pose l'application  $n(\cdot)$  de  $\tilde{I}_1$  dans  $\mathbb{N}$ , définie comme suit :

$$n(t) := \left\lceil \frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\tilde{c}, M)}} \right\rceil. \quad (20)$$

**Lemme 6.** *On a pour tout  $t \in \tilde{I}_1$  :*

$$\left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^{n(t)} \leq \Delta(t)^\eta \quad (21)$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{\max(\tilde{c}, M)}{\kappa}\right)^{n(t)-1} \leq \frac{1}{\Delta(t)^{1-\eta}}. \quad (22)$$

*Preuve du lemme 6 .* Tout d'abord,

$$n(t) \geq \frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\tilde{c}, M)}} \quad \kappa_1 \leq \kappa \quad \left(\frac{\kappa_1}{\kappa}\right)^{n(t)} \leq \exp \left( \frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\tilde{c}, M)}} \ln \frac{\kappa_1}{\kappa} \right)$$

ce qui montre (21) par définition (17) de  $\eta$ . Par ailleurs,

$$n(t) - 1 \leq \frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\tilde{c}, M)}} \quad \kappa < \tilde{c} \text{ par (19)} \quad \left(\frac{\max(\tilde{c}, M)}{\kappa}\right)^{n(t)-1} \leq \exp \left( \frac{\ln \Delta(t)}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\tilde{c}, M)}} \ln \frac{\max(\tilde{c}, M)}{\kappa} \right)$$

et donc  $\left(\frac{\max(\tilde{c}, M)}{\kappa}\right)^{n(t)-1} \leq \exp \left( -\ln \Delta(t) \frac{\ln \frac{\max(\tilde{c}, M)}{\kappa}}{\ln \frac{\kappa_1}{\max(\tilde{c}, M)}} \right) = \exp(-\ln \Delta(t)(1-\eta))$ , ce qui montre (22).  $\square$

Alors, avec la constante  $C$  définie par  $C := 2\alpha H c_1 c + \alpha H c_1 \frac{M}{\kappa} + \frac{d}{\kappa}$ , l'inégalité (15) devient avec  $n = n(t)$ , grâce à la majoration de  $b_{n(t)}$  et au lemme 6 :

$$\begin{aligned} \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} &\leq \left[ 2\alpha H c_1 c \Delta(t)^\eta + \left( \alpha H c_1 \frac{M}{\kappa} + \frac{d}{\kappa} \right) \frac{1}{\Delta(t)^{1-\eta}} \Delta(t) \right] \\ &\quad \times \left[ (a_1 \alpha H + a_2) \|f\|_{\mathcal{B}} + a_1 \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \right] \\ &= C \Delta(t)^\eta \left[ (a_1 \alpha H + a_2) \|f\|_{\mathcal{B}} + a_1 \|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \right]. \end{aligned}$$

Soit  $\tilde{I}_2$  une restriction de  $\tilde{I}_1$  telle que pour tout  $t \in \tilde{I}_2$ ,  $C a_1 \Delta(t)^\eta \leq \frac{1}{2}$ , alors pour tout  $t \in \tilde{I}_2$  :

$$\|(R_t(z) - R(z))f\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq 2C \Delta(t)^\eta (a_1 \alpha H + a_2) \|f\|_{\mathcal{B}},$$

ce qui donne (18) par définition de  $D$ .  $\square$

### 1.3 Remarque.

Le théorème de Keller-Liverani peut s'appliquer non plus seulement en 0, mais plus généralement en un point quelconque  $t_0$  de  $I_0$ . On définit tout d'abord

$$\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}(t_0) := \{z \in \mathbb{C}; \ |z| \geq \kappa, \ d(z, \sigma(Q(t_0)|_{\mathcal{B}})) \geq \rho, \ |z| \leq r\}. \quad (23)$$

#### Hypothèse $\mathcal{C}_{t_0}(0)$

$(Q(t); t \in I_0)$  est une famille d'opérateurs linéaires continus sur  $\mathcal{B}$ , et telle que  $Q(t_0) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{B}})$ , qui vérifie :

(H1) Il existe des constantes  $c_1 > 0$ ,  $\kappa_1 > 0$  et  $M > 0$  telles que, pour tout  $t \in I_0$ , pour tout  $f \in \mathcal{B}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait

$$\|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \kappa_1^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

(H2)  $\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} \rightarrow_{t \rightarrow t_0, t \in I_0} 0$ .

**Corollaire 2.** Sous l'hypothèse  $\mathcal{C}_{t_0}(0)$ , pour tous  $\kappa$ ,  $\rho$  et  $r$  tels que  $\kappa > \kappa_1$ ,  $\rho > 0$  et  $r > 0$ , il existe un voisinage  $\tilde{I}_0 \subseteq I_0$  de  $t_0$  tel que les opérateurs  $R_t(z) := (z - Q(t))^{-1}$  soient bien définis dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  pour tous  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}(t_0)$  et  $t \in \tilde{I}_0$ , et l'on a de plus :

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}(t_0), t \in \tilde{I}_0\} < +\infty$$

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q(t_0))^{-1}\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}(t_0)\} \rightarrow_{t \rightarrow t_0, t \in \tilde{I}_0} 0.$$

**Remarque 3.** L'existence des opérateurs  $R_t(z)$  pour tout  $z$  dans  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}(t_0)$  donnée par le corollaire ci-dessus implique directement l'inclusion dans  $[\overline{D}(0, \kappa_1) \cup \sigma(Q(t_0)|_{\mathcal{B}})]$  des points d'accumulation (quand  $t \rightarrow t_0$ ,  $t \in I_0$ ) des valeurs spectrales  $\sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}})$ .

Il existe une application de ce corollaire utile pour vérifier la condition de non-arithméticité. On commence par énoncer des hypothèses nécessaires à la proposition ci-dessous. On définit ci-dessous l'hypothèse  $\tilde{\mathcal{C}}(0)$ .

**Hypothèse  $\tilde{\mathcal{C}}(0)$ .**

$(Q(t); t \in \mathbb{R})$  est une famille d'opérateurs linéaires continus sur  $\mathcal{B}$  et  $\tilde{\mathcal{B}}$ . De plus, il existe des fonctions  $0 < \kappa_0 < 1$ ,  $0 < \kappa_1 < 1$ ,  $c_1 > 0$  et  $M > 0$  définies sur  $\mathbb{R}^*$  telles que  $\forall t_0 \in \mathbb{R}^*$ , il existe un voisinage  $I_0(t_0)$  de  $t_0$  tel que l'on ait :

(H0)  $\forall t \in I_0(t_0)$ ,  $Q(t)$  est quasi-compact tel que  $r_{\text{ess}}(Q(t)|_{\mathcal{B}}) \leq \kappa_0(t_0)$ .

(H1)  $\forall t \in I_0(t_0)$ ,  $f \in \mathcal{B}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1(t_0) \kappa_1(t_0)^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1(t_0) M(t_0)^n \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

(H2)  $\|Q(t) - Q(t_0)\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} \xrightarrow{t \rightarrow t_0, t \in I_0(t_0)} 0$ .

**Proposition 2.** *Sous l'hypothèse  $\tilde{\mathcal{C}}(0)$ , et si  $\forall t \neq 0$ ,  $r(Q(t)|_{\mathcal{B}}) < 1$ , alors on a pour tout compact  $K_0 \subset \mathbb{R}^*$*

$$r_{K_0} := \sup \left\{ r(Q(t)|_{\mathcal{B}}); t \in K_0 \right\} < 1. \quad (24)$$

De plus, il existe  $\rho_0 \in [0, 1[$  tel que

$$\forall \rho \in ]\rho_0, 1[, \quad \sup \left\{ \|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}}; t \in K_0, |z| = \rho \right\} < +\infty. \quad (25)$$

*Preuve de la proposition 2.* La preuve a été écrite dans [HP09] (lemme 12.3.). La proposition se démontre à l'aide du théorème de Keller-Liverani. On considère un compact  $K_0$  dans  $\mathbb{R}^*$ . Montrons tout d'abord par l'absurde que (24) est vérifié : on suppose que  $r_{K_0} \geq 1$ . Par hypothèse,  $r_{K_0} = 1$ . Il existe une suite  $(\tau_k)_k$  de  $K_0$  telle que l'on ait  $\lim_k r(Q(\tau_k)|_{\mathcal{B}}) = 1$ . Par compacité, on peut supposer que  $(\tau_k)_k$  est convergente. Soit  $\tau = \lim_k \tau_k$ . Comme  $\tau \in K_0$ ,  $\tau \neq 0$ . On peut aussi supposer que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\tau_k \in I_0(\tau)$  et  $r(Q(\tau_k)|_{\mathcal{B}}) > \kappa_0(\tau)$ . Pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $\lambda_k$  une valeur spectrale de  $Q(\tau_k)$  telle que  $|\lambda_k| = r(Q(\tau_k)|_{\mathcal{B}})$ ,  $\lambda_k \in \overline{D}(0, 1)$ . Par compacité, on peut supposer que  $(\lambda_k)_k$  est convergente. Soit  $\lambda = \lim_k \lambda_k$ ,  $|\lambda| = 1$ . De la remarque 3 précédente, on a que  $\lambda \in [\overline{D}(0, \kappa_1(\tau)) \cup \sigma(Q(\tau)|_{\mathcal{B}})]$ , avec  $\kappa_1(\tau) < 1$ , et donc  $\lambda \in \sigma(Q(\tau)|_{\mathcal{B}})$ . Or par hypothèse,  $r(Q(\tau)|_{\mathcal{B}}) < 1$ , ce qui termine de montrer la contradiction et donc (24).

Soit  $\rho_0 := r_{K_0} < 1$  par ce qui précède, et soit  $\rho \in ]\rho_0, 1[$ . Comme  $\forall t \in K_0$ ,  $r(Q(t)|_{\mathcal{B}}) \leq r_{K_0} < \rho$ , et comme  $K_0$  est compact, par le théorème de Keller-Liverani (corollaire 2 précédent) et la propriété de Borel-Lebesgue, on a  $\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}}; t \in K_0, |z| = \rho\} < +\infty$ , ce qui termine de montrer (25).  $\square$

## 2 Forte ergodicité.

On s'intéresse par la suite au cas particulier de la forte ergodicité définie ci-dessous :

(ERG sur  $\mathcal{B}$ ) Il existe  $\Pi$  un projecteur non nul de rang fini et des constantes  $c_0 > 0$  et  $0 < \kappa_0 < 1$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \leq c_0 \kappa_0^n$ .

**Remarque 4.** *L'hypothèse (ERG sur  $\mathcal{B}$ ) est équivalente à l'existence d'un projecteur de rang fini  $\Pi$  tel que  $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ .*

En effet, l'implication directe est évidente. Supposons que  $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , et soit  $f \in \mathcal{B}$ . Alors  $Q \circ (Q^n f) \rightarrow Q \circ (\Pi f)$  quand  $n \rightarrow +\infty$  par continuité de  $Q$ , et donc  $Q \circ (\Pi f) = \Pi f$  par unicité de la limite. De même,  $Q^n \circ (Qf) \rightarrow \Pi \circ (Qf)$ , et donc  $\Pi \circ (Qf) = \Pi f$ . Donc

$$Q \circ \Pi = \Pi \quad \text{et} \quad \Pi \circ Q = \Pi. \quad (26)$$

On suppose que  $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ . Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\rho := \|Q^{n_0} - \Pi\|_{\mathcal{B}} < 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on écrit  $n = n_0 p + b \in \mathbb{N}$  avec  $0 \leq b < n_0$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Alors, par (26),  $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} = \|Q^b (Q^{n_0})^p - \Pi\|_{\mathcal{B}} = \|Q^b ((Q^{n_0})^p - \Pi)\|_{\mathcal{B}} = \|Q^b (Q^{n_0} - \Pi)^p\|_{\mathcal{B}} \leq \rho^p \leq \frac{1}{\rho} (\rho^{\frac{1}{n_0}})^n$ . On pose donc  $c_0 := \frac{1}{\rho}$  et  $\kappa_0 := \rho^{\frac{1}{n_0}}$ , ce qui donne bien  $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \leq c_0 \kappa_0^n$ .

Cette hypothèse (ERG sur  $\mathcal{B}$ ) implique la quasi-compacité de  $Q$ , de rayon spectral essentiel  $r_{ess}(Q|_{\mathcal{B}}) \leq \kappa_0$ , de rayon spectral  $r(Q|_{\mathcal{B}}) = 1$  et  $\min\{\lambda \in \sigma(Q|_{\mathcal{B}}); |\lambda| > \kappa_0\} = 1$ , comme le montre la proposition suivante (on rappelle que  $\dim(\Pi(\mathcal{B})) < \infty$  par hypothèse).

**Proposition 3.** *Sous l'hypothèse (ERG sur  $\mathcal{B}$ ),  $\sigma(Q|_{\mathcal{B}}) \subset [\overline{D}(0, \kappa_0) \cup \{1\}]$ .*

*Preuve de la proposition 3.* Comme  $\Pi$  est un projecteur, on a  $\mathcal{B} = \Pi(\mathcal{B}) \oplus \text{Ker}(\Pi)$ . Or, par (26),  $\Pi(\mathcal{B})$  est stable par  $Q$  et  $\text{Ker}(\Pi)$  aussi. On en déduit facilement que

$$\sigma(Q|_{\mathcal{B}}) \subset \left[ \sigma(Q|_{\Pi(\mathcal{B})}) \cup \sigma(Q|_{\text{Ker}(\Pi)}) \right].$$

Or on a  $\sigma(Q|_{\text{Ker}(\Pi)}) \subset \overline{D}(0, \kappa_0)$ . En effet :  $r(Q|_{\text{Ker}(\Pi)}) = \lim_n \| (Q|_{\text{Ker}(\Pi)})^n \|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} \leq \kappa_0$  d'après l'hypothèse 3. De plus, l'égalité  $Q \circ (\Pi f) = \Pi f$  donne  $Q|_{\Pi(\mathcal{B})} = \text{Id}|_{\Pi(\mathcal{B})}$  avec  $\dim(\Pi(\mathcal{B})) < +\infty$ , d'où  $\sigma(Q|_{\Pi(\mathcal{B})}) = \{1\}$ .  $\square$

On applique alors le théorème de Keller-Liverani pour faire la remarque suivante. Sous  $\mathcal{C}_0(0)$  et sous (ERG sur  $\mathcal{B}$ ), pour tout  $\kappa > \tilde{\kappa}$ , avec  $\tilde{\kappa} := \max\{\kappa_0, \kappa_1\}$ , et pour tout  $\rho > 0$ , il existe un voisinage  $\tilde{I}_0 \subseteq I_0$  de 0 tel que le spectre  $\sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}})$  de  $Q(t)$  pour  $t \in \tilde{I}_0$  soit contenu dans  $[D(0, \kappa) \cup D(1, \rho)]$ . On ne considère donc désormais plus  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r, \mathcal{B}}$  mais  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r}$  défini comme le complémentaire de  $[D(0, \kappa) \cup D(1, \rho)]$  dans  $\overline{D}(0, r)$ . Plus précisément, pour tous  $\kappa, \rho$  et  $r$  tels que  $\kappa > \tilde{\kappa}$ ,  $\rho > 0$  et  $r > 0$ , on pose

$$\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| \geq \kappa, |z - 1| \geq \rho, |z| \leq r\}. \quad (27)$$

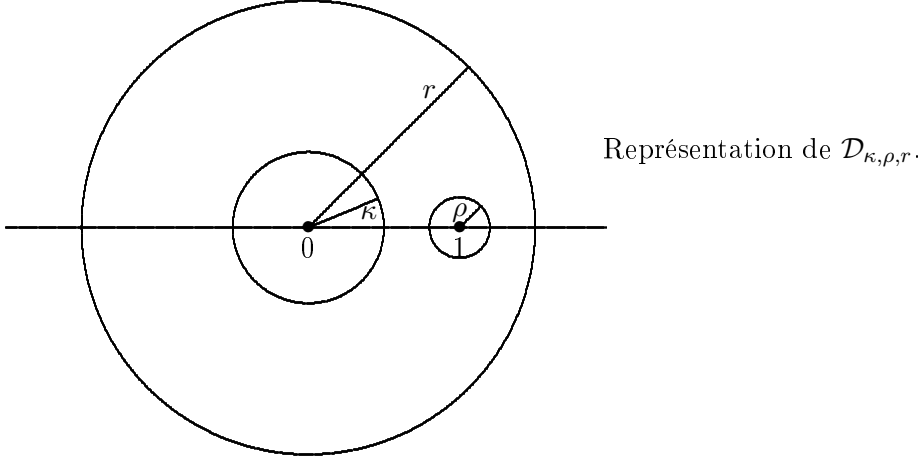
Par ailleurs pour tous  $\kappa, \rho$  et  $r$  tels que  $\kappa > \tilde{\kappa}$ ,  $\rho > 0$  et  $r > 0$ , on définit  $\Gamma_1 = \Gamma_1(\rho)$  le cercle orienté centré en  $z = 1$  de rayon  $\rho$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma_0(\kappa)$  le cercle orienté centré en  $z = 0$  de rayon  $\kappa$ , et  $\Gamma = \Gamma(r)$  le cercle orienté centré en  $z = 0$  de rayon  $r$ .

On impose

- $\kappa < 1$  (et donc  $\kappa_0 < 1$  et  $\kappa_1 < 1$ ) et  $\rho < 1 - \kappa$  de telle sorte que les deux cercles  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  aient une intersection vide

– et  $r \geq 1 + \rho$  de telle sorte que  $(\Gamma_0 \cup \Gamma_1) \subset \overline{D}(0, r)$ .

On représente ci-dessous  $\mathcal{D}_{\kappa, \rho, r}$  sous ces conditions, ainsi que  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$ .



### Hypothèse $\widetilde{\mathcal{C}}_0(0)$

$(Q(t); t \in I_0)$  est une famille d'opérateurs linéaires continus sur  $\mathcal{B}$  (c'est-à-dire  $\forall t \in I_0, Q(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ ) et telle que  $Q(0) \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{B}})$ , qui vérifie :

(ERG sur  $\mathcal{B}$ ) Il existe  $\Pi$  un projecteur non nul de rang fini et des constantes  $c_0 > 0$  et  $0 < \kappa_0 < 1$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait  $\|Q^n - \Pi\|_{\mathcal{B}} \leq c_0 \kappa_0^n$ .

(H1) Il existe des constantes  $c_1 > 0$ ,  $0 < \kappa_1 < 1$  et  $M > 0$  telles que, pour tous  $t \in I_0$ ,  $f \in \mathcal{B}$  et  $n \in \mathbb{N}$  on ait

$$\|Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq c_1 \kappa_1^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

(H2)  $\Delta(t) := \|Q(t) - Q\|_{\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}}} \rightarrow_{t \rightarrow 0, t \in I_0} 0$ .

**Corollaire 3.** Sous l'hypothèse  $\widetilde{\mathcal{C}}_0(0)$  précédente, pour tous  $\kappa$ ,  $\rho$  et  $r$  tels que

$$\widetilde{\kappa} < \kappa < 1, \quad 0 < \rho < 1 - \kappa, \quad \text{et} \quad r \geq 1 + \rho, \quad (28)$$

avec  $\widetilde{\kappa}$  défini par

$$\widetilde{\kappa} := \max\{\kappa_0, \kappa_1\}, \quad (29)$$

il existe un voisinage  $\widetilde{I}_0 \subseteq I_0$  de 0 tel que les opérateurs  $R_t(z) := (z - Q(t))^{-1}$  soient bien définis dans  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$  pour tous  $z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r}$  et  $t \in \widetilde{I}_0$  et en particulier  $R_t(z) := (z - Q(t))^{-1}$  sont bien définis sur  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$ , et l'on a de plus :

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1}\|_{\mathcal{B}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r}, t \in \widetilde{I}_0\} < +\infty \quad (30)$$

$$\sup\{\|(z - Q(t))^{-1} - (z - Q)^{-1}\|_{\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}}}; z \in \mathcal{D}_{\kappa, \rho, r}\} \rightarrow_{t \rightarrow 0, t \in \widetilde{I}_0} 0. \quad (31)$$

Dans ce qui suit, on suppose désormais que l'hypothèse  $\widetilde{\mathcal{C}}_0(0)$  est vérifiée. On se fixe  $\kappa$ ,  $\rho$  et  $r$  tels que (28) soit vérifiée, et on note  $\widetilde{I}_0$  l'intervalle réel donné par le corollaire 3. Alors la résolvante  $R_t(z)$  est bien définie pour tous  $t \in \widetilde{I}_0$  et  $z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma$ .

## 2.1 Définition de projecteurs et quelques lemmes.

Soient les opérateurs définis sur  $\mathcal{B}$  pour tout  $t \in \widetilde{I}_0$  et pour  $i = 0, 1$  par :

$$\Pi_i(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_i} R_t(z) dz. \quad (32)$$

Ces opérateurs sont des projecteurs qui vérifient pour tout  $t \in \widetilde{I}_0$  sur  $\mathcal{B}$  :

$$\Pi_0(t) + \Pi_1(t) = Id \quad \text{et} \quad \Pi_0(t)\Pi_1(t) = \Pi_1(t)\Pi_0(t) = 0. \quad (33)$$

L'égalité (33) se montre facilement. Tout d'abord par analyticité de  $z \mapsto R_t(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$  avec  $z$  tel que  $|z| \notin \sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}})$ , on a  $\Pi_0(t) + \Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R_t(z) dz$ . De plus, on a  $\Pi_0(t) + \Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \left( \sum_{k \geq 0} z^{-k-1} Q(t)^k \right) dz$ . Et par convergence uniforme de la série intégrée,  $\Pi_0(t) + \Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k \geq 0} Q(t)^k \left( \int_{\Gamma} z^{-k-1} dz \right)$ , ce qui démontre la première égalité de (33) par la formule intégrale de Cauchy. De plus, pour  $i, j \in \{0, 1\}$ , on a grâce à l'égalité résolvante  $R_t(z)R_t(z') = \frac{R_t(z) - R_t(z')}{z' - z}$  :

$$\begin{aligned} \Pi_i(t)\Pi_j(t) &= \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_i} R_t(z) dz \right) \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_j} R_t(z') dz' \right) \\ &= \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} R_t(z) R_t(z') dz dz' \\ &= \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{R_t(z)}{z' - z} dz dz' + \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{R_t(z')}{z - z'} dz dz' \\ &= \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma_i} R_t(z) \left( \int_{\Gamma_j} \frac{1}{z' - z} dz' \right) dz + \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma_j} R_t(z') \left( \int_{\Gamma_i} \frac{1}{z - z'} dz \right) dz' \end{aligned}$$

et l'on obtient les égalités souhaitées avec la formule intégrale de Cauchy.

Le projecteur que l'on vient de définir vérifie  $\Pi_1(0) = \Pi$ , avec  $\Pi$  le projecteur défini dans (ERG), comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 7.** *On a  $\Pi_1(0) = \Pi$ .*

*Preuve du lemme 7.*  $\Pi_1(0)$  est un projecteur tel que  $\Pi_1(0) \circ \Pi = \Pi \circ \Pi_1(0) = \Pi \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} R(z) dz$  par définition de  $\Pi_1(0)$ . Or  $R(z) = (z-1)^{-1}$  sur  $\Pi(\mathcal{B})$  par (26), donc  $\Pi \circ \Pi_1(0) = \Pi \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} (z-1)^{-1} dz = \Pi$ , ce qui implique que  $\Pi(\mathcal{B}) = \Pi_1(0)(\mathcal{B})$ . De plus,  $Ker(\Pi) \subset Ker(\Pi_1(0))$ . En effet,  $Ker(\Pi)$  est stable par  $Q$  et  $\sigma(Q|_{Ker(\Pi)}) \leq \kappa_0$  par (ERG), ce qui implique par définition de  $\Gamma_1$  que pour tout  $f \in Ker(\Pi)$  :

$$\begin{aligned} \Pi_1(0)f &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \left( \sum_{n \geq 0} z^{-n-1} Q^n f \right) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 0} Q^n f \left( \int_{\Gamma_1} z^{-n-1} dz \right) = 0 \text{ par la formule intégrale de Cauchy.} \end{aligned}$$

Donc  $\text{Ker}(\Pi) \subset \text{Ker}(\Pi_1(0))$ ,  $\text{Ker}(\Pi) = \text{Ker}(\Pi_1(0))$ , ce qui termine de montrer le lemme.  $\square$

On énonce maintenant le lemme classique suivant qui donne une expression intégrale de  $Q(t)^n$ .

**Lemme 8.** *Pour tout  $t \in \tilde{I}_0$ , et  $n \geq 1$ , on a :*

$$Q(t)^n \Pi_0(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} z^n R_t(z) dz \quad (34)$$

$$\text{et } Q(t)^n \Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} z^n R_t(z) dz. \quad (35)$$

*Preuve du lemme 8.* On ne montre que (34), (35) se prouvant avec les mêmes arguments. Par analyticité de  $z \mapsto R_t(z)$  pour  $z \in \Gamma$ , on a  $\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} z^n R_t(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} z^n \left( \sum_{i \geq 0} z^{-i-1} Q(t)^i \right) dz = \sum_{i \geq 0} Q(t)^i \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} z^{n-i-1} dz \right) = Q(t)^n$ . On peut alors exprimer  $Q(t)^n \Pi_0(t)$  sous forme intégrale, à l'aide de l'égalité résolvante :

$$\begin{aligned} Q(t)^n \Pi_0(t) &= \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} z^n R_t(z) dz \right) \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} R_t(z') dz' \right) \\ &= \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_0} z^n R_t(z) R_t(z') dz dz' \\ &= \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_0} z^n \frac{R_t(z)}{z' - z} dz dz' + \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_0} z^n \frac{R_t(z')}{z - z'} dz dz' \\ &= \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma} z^n R_t(z) \left( \int_{\Gamma_0} \frac{1}{z' - z} dz' \right) dz + \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^2 \int_{\Gamma_0} R_t(z') \left( \int_{\Gamma} \frac{z^n}{z - z'} dz \right) dz' \\ &= 0 + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} z'^n R_t(z') dz' \end{aligned}$$

par la formule intégrale de Cauchy, ce qui termine la démonstration de (34).  $\square$

## 2.2 Rang des projecteurs.

On s'intéresse maintenant à l'étude du rang des projecteurs perturbés  $\Pi_1(t)$ . Dans le paragraphe 2.3, on étudiera plus particulièrement le cas où  $\Pi$  est de rang égal à 1.

**Proposition 4.** *Il existe un voisinage réel de 0 noté  $I_{00} \subset \tilde{I}_0^2$  tel que, pour tout  $t \in I_{00}$ ,  $\Pi_1(t)$  soit de même rang que celui du projecteur  $\Pi$ .*

*Preuve de la proposition 4.* Soit  $t \in \tilde{I}_0$  fixé, et notons  $n := \text{rg}(\Pi)$  et  $m := \text{rg}(\Pi_1(t))$ . Montrons tout d'abord que  $\text{rg}(\Pi_1(t)) \leq n$ . Si l'on considère une famille  $(f_i)_{i=1..n+1}$  de  $n+1$  éléments de  $\Pi_1(t)(\mathcal{B})$ , alors il existe des constantes  $(a_i)_{i=1..n+1}$  telles que  $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \Pi(f_i) = 0$ . On note  $h := \sum_{i=1}^{n+1} a_i f_i$ , ce qui implique que  $\Pi_1(t)h = h$  (car  $f_i \in \Pi_1(t)(\mathcal{B})$  pour tout  $i = 1..n+1$  et  $\Pi_1(t)$  projecteur) et  $\Pi h = 0$ . On a donc

$$\|h\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \|\Pi_1(t)h - \Pi h\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \|\Pi_1(t) - \Pi(0)\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} \|h\|_{\mathcal{B}}. \quad (36)$$

---

2. On rappelle que  $\tilde{I}_0$  est défini dans le corollaire 3.



Par ailleurs, on utilise le lemme suivant d'équivalence des normes sur l'espace  $\Pi_1(t)(\mathcal{B})$ . Les opérateurs  $Q(t)$  et  $\Pi_1(t)$  commutent, donc l'espace

$$\mathcal{B}_t := \Pi_1(t)(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \quad (37)$$

est stable par  $Q(t)$  : on peut considérer l'opérateur  $Q(t)|_{\mathcal{B}_t} := Q(t)\Pi_1(t)$ .

**Lemme 9.**

*i) Pour tout  $t \in \tilde{I}_0$ , le spectre  $\sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}_t})$  est contenu dans le disque  $D(1, \rho)$ .*

*j) La norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  est dominée sur  $\mathcal{B}_t$  par  $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{B}}}$  uniformément en  $t \in \tilde{I}_0$ , c'est-à-dire*

$$\exists D \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \forall t \in \tilde{I}_0, \quad \forall f \in \mathcal{B}_t, \quad \|f\|_{\mathcal{B}} \leq D \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}. \quad (38)$$

Comme  $h \in \Pi_1(t)(\mathcal{B})$ , il existe  $D > 0$  indépendante de  $t$  tel que

$$\|h\|_{\mathcal{B}} \leq D \|h\|_{\tilde{\mathcal{B}}}. \quad (39)$$

Ainsi, par (36) et (39), on a

$$\|h\|_{\tilde{\mathcal{B}}} \leq \|\Pi_1(t) - \Pi_1(0)\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} \|h\|_{\mathcal{B}} \leq D \|\Pi_1(t) - \Pi_1(0)\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} \|h\|_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

D'après (31), il existe un voisinage réel de 0 noté  $I_{00} \subset \tilde{I}_0$  tel que pour tout  $t \in I_{00}$  on ait  $D \|\Pi_1(t) - \Pi_1(0)\|_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}} \leq \frac{1}{2}$  et donc  $\|h\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = 0$ ,  $\|h\|_{\mathcal{B}} = 0$  par (39) et  $h = 0$ , ce qui implique que le rang du projecteur vérifie  $rg(\Pi_1(t)) < n + 1$ . Pour montrer que  $rg(\Pi) \leq m$ , on procède de la même façon en considérant cette fois une famille  $(f_i)_{i=1..m+1}$  de  $m + 1$  éléments de  $\Pi(\mathcal{B})$ .  $\square$

*Preuve du lemme 9.*

Montrons tout d'abord (i)  $\Rightarrow$  (j). Le spectre  $\sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}_t})$  est contenu dans  $D(1, \rho) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1 - \rho\}$  par (i). Il implique en particulier que pour tout  $t \in \tilde{I}_0$ ,  $Q(t)|_{\mathcal{B}_t}$  est inversible (car  $0 \notin D(1, \rho)$ ), et donc on peut montrer par l'égalité (10) que pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \tilde{I}_0$  :

$$Q(t)|_{\mathcal{B}_t}^{-n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} z^{-n} R_t(z) dz$$

(on rappelle que  $\Gamma_1$  est le cercle orienté centré en  $z = 1$  de rayon  $\rho$ ). Donc par (30), il existe une constante  $A$  telle que pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \tilde{I}_0$ ,  $\|Q(t)|_{\mathcal{B}_t}^{-n}\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{A}{(1-\rho)^n}$ . Ainsi pour tous  $f \in \mathcal{B}_t$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a par l'inégalité de Doeblin-Fortet (H1) et par la stabilité de l'espace  $\mathcal{B}_t$  par  $Q(t)$  :

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \|Q(t)^{-n} Q(t)^n f\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{A}{(1-\rho)^n} [c_1 \kappa_1^n \|f\|_{\mathcal{B}} + c_1 M^n \|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}}]$$

Rappelons que  $\rho$  a été défini tel que  $0 < \rho < 1 - \kappa$ , et donc  $\kappa_1 < \kappa < 1 - \rho$ . On définit l'entier  $N$  tel que  $Ac_1(\frac{\kappa_1}{1-\rho})^N \leq \frac{1}{2}$ , soit par exemple  $N = \left\lceil \frac{\ln(2Ac_1)}{\ln \frac{1-\rho}{\kappa_1}} \right\rceil$ , et la constante suivante  $D$  par :

$$D := 2Ac_1 \left( \frac{M}{1-\rho} \right)^N, \quad (40)$$

ce qui termine la démonstration de (j).

Montrons maintenant (i). Soit  $A(\lambda) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} R_t(z)(\lambda - z)^{-1} dz$ , avec  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \notin \Gamma_1$ . Comme  $(\lambda - Q(t))\Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} R_t(z')(\lambda - z') dz'$  en utilisant la définition de  $\Pi_1(t)$  et (35), on a :

$$\begin{aligned} A(\lambda)(\lambda - Q(t))\Pi_1(t) &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_1} R_t(z)(\lambda - z)^{-1} dz \int_{\Gamma_1} R_t(z')(\lambda - z') dz' \\ &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_2} R_t(z)(\lambda - z)^{-1} dz \int_{\Gamma_1} R_t(z')(\lambda - z') dz' \end{aligned}$$

avec  $\Gamma_2$  le cercle orienté centré en  $z = 1$  de rayon  $\rho + \epsilon$  pour tout  $\epsilon > 0$  tel que  $D(0, \kappa) \cap \Gamma_2 = \emptyset$  (ce qui est possible car on a supposé  $\kappa < 1 - \rho$ ). On considère alors  $\lambda$  tel que  $|\lambda - 1| \geq \rho + 2\epsilon$ . On a par l'égalité résolvante :

$$\begin{aligned} A(\lambda)(\lambda - Q(t))\Pi_1(t) &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} R_t(z)R_t(z') \frac{\lambda - z'}{\lambda - z} dz' dz \\ &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{R_t(z') - R_t(z)}{z - z'} f(z')g(z) dz' dz \end{aligned}$$

avec  $f(z') = \lambda - z'$  analytique sur  $\overline{D}(1, \rho)$  et  $g(z) = (\lambda - z)^{-1}$  analytique sur  $\overline{D}(1, \rho + \epsilon)$  par hypothèse sur  $\lambda$ . D'où en développant :

$$\begin{aligned} A(\lambda)(\lambda - Q(t))\Pi_1(t) &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_1} R_t(z')f(z') \left( \int_{\Gamma_2} \frac{g(z)}{z - z'} dz \right) dz' \\ &\quad + \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\Gamma_2} R_t(z)g(z) \left( \int_{\Gamma_1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' \right) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} R_t(z')f(z')g(z') dz' + 0 \\ &= \Pi_1(t) = (\lambda - Q(t))\Pi_1(t) \circ A(\lambda) \quad \text{par commutation} \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\lambda - Q(t)$  est inversible sur  $\Pi_1(\mathcal{B})$  pour  $\lambda$  tel que  $|\lambda - 1| \geq \rho + 2\epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$  suffisamment petit. Donc  $\sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}_t}) \subset [\sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}}) \cap \overline{D}(1, \rho)] = D(1, \rho)$ .  $\square$

### 2.3 Cas particulier : $rg(\Pi) = 1$ .

On considère maintenant l'hypothèse (ERG sur  $\mathcal{B}$ ) dans le cas où le projecteur  $\Pi$  vérifie  $\Pi \mathbf{1} = \mathbf{1}$  et  $rg(\Pi) = 1$ , avec  $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$ . Par la proposition 4, il existe  $I_{00}$  tel que pour tout  $t \in I_{00}$ ,  $rg(\Pi_1(t)) = 1$ ,

$$\forall t \in I_{00}, \quad \Pi_1(t)(\mathcal{B}) = \mathbb{C} \cdot (\Pi_1(t)\mathbf{1}).$$

Or  $Q(t)$  et  $\Pi_1(t)$  commutent, donc il existe une application  $\lambda(\cdot)$  de  $I_{00}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $Q(t)\Pi_1(t)\mathbf{1} = \lambda(t)\Pi_1(t)\mathbf{1}$ , et par linéarité de  $Q(t)$  :

$$\forall t \in I_{00} \quad Q(t)\Pi_1(t) = \lambda(t)\Pi_1(t) \quad (41)$$

ce qui implique pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q(t)^n \Pi_1(t) = \lambda(t)^n \Pi_1(t)$ . On pourra montrer par le théorème de Keller-Liverani que  $Q(\cdot)^n$  se comporte quand  $n \rightarrow \infty$  comme  $\lambda(\cdot)^n \Pi_1(\cdot)$ .

**Remarque 5.** L'application complexe  $\lambda(\cdot)$  est continue en 0.

On remarque tout d'abord que  $\Pi_1(\cdot)$  vérifie la même propriété de régularité que la résolvante : de par sa définition intégrale (32) et le théorème de Keller-Liverani (cf. (31)), le projecteur  $\Pi_1(\cdot)$  est continu en 0 en tant qu'opérateur sur  $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ . Soit  $\nu \in \tilde{\mathcal{B}}'$  tel que  $\nu(\mathbf{1}) \neq 0$ . On a  $\nu(\Pi_1(t)\mathbf{1}) \rightarrow \nu(\Pi_1)\mathbf{1} = \nu(\mathbf{1}) \neq 0$  quand  $t \in I_{00} \rightarrow 0$ . Donc quitte à restreindre  $I_{00}$ , on peut supposer  $\nu(\Pi_1(t)\mathbf{1}) \neq 0$  sur  $I_{00}$ . On a alors par linéarité de  $\nu$  :

$$\lambda(t) = \frac{\nu[Q(t)\Pi_1(t)\mathbf{1}]}{\nu[\Pi_1(t)\mathbf{1}]}.$$

Or  $Q(t)\Pi_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} z(z - Q(t))^{-1} dz$  par (35), ce qui implique par le théorème de Keller-Liverani (cf. (31)) que  $Q(\cdot)\Pi_1(\cdot)$  est continu en 0 en tant qu'opérateur de  $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ . Comme  $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$ , les applications  $Q(\cdot)\Pi_1(\cdot)\mathbf{1}$  et  $\Pi_1(\cdot)\mathbf{1}$  sont continues en 0 en tant qu'éléments de  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Finalement, comme  $\nu \in \tilde{\mathcal{B}}'$ , la remarque est montrée.

**Remarque 6.** On a pour tout  $t \in I_{00}$  :  $\Pi_1(t)(\mathcal{B}) = \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]$  et  $\text{Ker}(\Pi_1(t)) = [\lambda(t) - Q(t)](\mathcal{B})$ , ce qui permet de montrer que  $\text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]^2 = \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]$  (simplicité algébrique de la valeur propre  $\lambda(t)$ ).

a) En effet, soit  $t \in I_{00}$ . Par (41), on a  $\Pi_1(t)(\mathcal{B}) \subset \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]$ . De plus, pour tout  $f \in \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]$ , on a  $\lambda(t)^n(\Pi_1(t)f - f) = Q(t)^n\Pi_1(t)f - Q(t)^nf = -Q(t)^n\Pi_0(t)f$ . Or, quitte à restreindre  $I_{00}$ , on peut supposer  $|\lambda(t)| > \kappa$  par continuité de  $\lambda$  en 0 ( $\lambda(0) = 1 > \kappa$ ). En considérant les normes, on obtient alors :  $\|\Pi_1(t)f - f\|_{\mathcal{B}} \leq |\lambda(t)|^{-n} \|Q(t)^n\Pi_0(t)f\|_{\mathcal{B}}$ , et donc par (34) et (30),  $\|\Pi_1(t)f - f\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Ceci implique  $\Pi_1(t)f = f$ , et termine la preuve du premier résultat de la remarque.

b) Quitte à restreindre  $I_{00}$ , on peut supposer  $|\lambda(t)| > \kappa$  par continuité de  $\lambda$  en 0. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par (10), on a  $\text{Id} = [\lambda(t)^{-n}Q(t)^n] + [(\lambda(t) - Q(t)) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(t)^{-1-i}Q(t)^i]$ . Or,  $\lambda(t)^{-n}Q(t)^n$  converge vers  $\Pi_1(t)$ . En effet,  $\|\lambda(t)^{-n}Q(t)^n - \Pi_1(t)\|_{\mathcal{B}} = \|\lambda(t)^{-n}Q(t)^n\Pi_0(t)\|_{\mathcal{B}} = |\lambda(t)|^{-n}O(\kappa^n)$ . Par ailleurs  $(\lambda(t) - Q(t)) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(t)^{-1-i}Q(t)^i$  converge dans  $[\lambda(t) - Q(t)](\mathcal{B})$ . En effet, soit  $f \in \Pi_1(t)(\mathcal{B}) = \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]$ , alors  $(\lambda(t) - Q(t)) \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(t)^{-1-i}Q(t)^i f = 0$ . Et soit  $f \in \text{Ker}(\Pi_1(t))$ , alors  $\|Q(t)^nf\|_{\mathcal{B}} = \|Q(t)^n\Pi_0(t)f\|_{\mathcal{B}} = O(\kappa^n)$ , donc  $\sum_{i=0}^n \lambda(t)^{-1-i}Q(t)^i f$  converge sur le Banach  $\mathcal{B}$ , et par continuité de  $Q(t)$  on a le résultat. Ainsi,  $\mathcal{B} = \Pi_1(t)(\mathcal{B}) + [\lambda(t) - Q(t)](\mathcal{B})$ . Or  $\mathcal{B} = \Pi_1(t)(\mathcal{B}) \oplus \text{Ker}(\Pi_1(t))$ , et  $[\lambda(t) - Q(t)](\mathcal{B}) \subset \text{Ker}(\Pi_1(t))$  par (41), ce qui donne le deuxième résultat de la remarque.

c) Enfin, soit  $f \in \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]^2$ . Alors par (a), on a  $\mathcal{B} = \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)] \oplus \text{Ker}(\Pi_1(t))$ . Donc il existe  $g \in \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]$  et  $h \in \text{Ker}(\Pi_1(t))$  tels que  $f = g + h$ , et donc par linéarité de  $Q(t)$ , on a :  $[\lambda(t) - Q(t)]f = 0 + [\lambda(t) - Q(t)]h$ . Or par hypothèse sur  $f$ ,  $[\lambda(t) - Q(t)]f \in \text{Ker}[\lambda(t) - Q(t)]$ , et par stabilité de  $\text{Ker}(\Pi_1(t))$  par l'opérateur  $Q(t)$ ,  $[\lambda(t) - Q(t)]h \in \text{Ker}(\Pi_1(t))$ . Donc, comme la somme des sous-espaces est directe, ceci termine de montrer la remarque 6.

**Remarque 7.** Pour tout  $t \in I_{00}$ , on a  $\sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}}) \subset [D(0, \kappa) \cup \{\lambda(t)\}]$ .

En effet, en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 3,

---

3. quitte à restreindre  $I_{00}$

comme  $\Pi_1(t)$  est un projecteur, on a :  $\mathcal{B} := \Pi_1(t)(\mathcal{B}) \oplus \text{Ker}(\Pi_1(t))$  et

$$\sigma(Q(t)|_{\mathcal{B}}) \subset \left[ \sigma(Q(t)|_{\Pi_1(t)(\mathcal{B})}) \cup \sigma(Q(t)|_{\text{Ker}(\Pi_1(t))}) \right].$$

Or on a  $\sigma(Q(t)|_{\text{Ker}(\Pi_1(t))}) \subset \overline{D}(0, \kappa)$ . En effet, on a  $(Q(t)|_{\text{Ker}(\Pi_1(t))})^n = Q(t)^n \Pi_0(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_0} z^n R_t(z) dz$  par l'égalité (34). Ceci implique que le rayon spectral vérifie  $r(Q(t)|_{\text{Ker}(\Pi_1(t))}) = \lim_n \|(Q(t)|_{\text{Ker}(\Pi_1(t))})^n\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{n}} \leq \kappa$ . De plus, l'égalité  $Q(t) \Pi_1(t) = \lambda(t) \Pi_1(t)$  donne  $Q(t)|_{\Pi_1(t)(\mathcal{B})} = \lambda(t) Id_{\Pi_1(t)(\mathcal{B})}$  avec  $\dim(\Pi_1(t)(\mathcal{B})) < +\infty$ , d'où  $\sigma(Q(t)|_{\Pi_1(t)(\mathcal{B})}) = \{\lambda(t)\}$ .  $\square$

## Références

- [Bal00] V. Baladi. *Positive Transfer Operators and Decay of Correlations.*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific, 2000.
- [DS58] N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear Operators, Part. I : General Theory*. Wiley, New York, 1958.
- [Hen93] H. Hennion. Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118 :627634, 1993.
- [HP09] L. Hervé and F. Pène. Nagaev method via Keller-Liverani theorem. *Bull. Soc. Math. France*, 2009. Accepted for publication, Hal-00203408.
- [KL99] G. Keller and C. Liverani. Stability of the spectrum for transfer operators. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze Sér. 4*, XXVIII :141–152, 1999.
- [Liv04] C. Liverani. Invariant measure and their properties. a functional analytic point of view. In Pisa Pubblicazioni della Classe di Scienze, Scuola Normale Superiore, editor, *Dynamical Systems. Part II : Topological Geometrical and Ergodic Properties of Dynamics*, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, 2004.